2.9.16 Přirozená exponenciální funkce, přirozený logaritmus

Předpoklady: 2915

Pedagogická poznámka: Při výkladu v první části hodiny je třeba postupovat tak, aby zbylo ještě 15 minut na samostatné řešení příkladů na konci hodiny.

Pedagogická poznámka: V klasické gymnaziální sadě je přirozená exponenciální funkce vybrána jako funkce, jejíž tečnou v bodě $[0;1]$ je funkce $y = x + 1$. Asi dvakrát jsem látku vysvětloval tímto způsobem a v obou případech jsem byl ze strany těch nejchytřejších dotazován, co je tak zajímavého na tečně $y = x + 1$.
Od té doby vysvětluji přirozenou exponenciální funkci pomocí derivace. Zejména ve třídách, kde učím fyziku, to není problém, protože hned v prvním ročníku se při výuce kinematiky studenti učí graficky přibližně derivovat funkce. Tento způsob se mi osvědčil, studenti nemají s pochopením derivace jako funkce ukazující změny žádné zvláštní problémy. Derivace prvních tří funkcí v tabulce hledáme se studenty společně na tabuli.

V části matematiky, která se nazývá diferenciální počet (čeká nás až na konci čtvrtého ročníku), se zkoumají funkce. Velmi důležité je zejména hledání funkce, která nám o nějaké jiné funkci říká, jak se mění její hodnoty.

Takové dvojice funkcí známe z fyziky. Například:

- dráha rovnoměrně zrychleného pohybu (s nulovou počáteční rychlostí): $s = \frac{1}{2}at^2$,
- rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu (s nulovou počáteční rychlostí): $v = at$,

nebo

- dráha rovnoměrného pohybu: $s = vt$,
- rychlost rovnoměrného pohybu: $v = konstanta$.

Rychlost nám říká, jak se v každém okamžiku mění dráha tělesa $\Rightarrow$ funkce $v = at$ nám říká, jak se mění funkce $s = \frac{1}{2}at^2$ (matematici říkají, že funkce $v = at$ je derivací funkce $s = \frac{1}{2}at^2$).

Hledání derivací je pro fyziku i matematiku naprosto zásadní úkol (jedním z objevitelů diferenciálního počtu je I. Newton, který tento druh matematiky vymyslel, protože bez něj nebyl schopen matematicky zapsat své fyzikální zákony).
Téměř ke všem funkcím, o nichž jsme dosud mluvili, existuje funkce, která je jejich derivací. Ukázky jsou v tabulce:

Funkce	**Derivace (značí se y')**
$y = 1$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$

$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Všechny derivace se liší od funkce, jejíž změny popisují.
Existuje funkce, která sama o sobě říká, jak se mění? Která je sama svojí derivací?

Jak vypadá derivace exponenciální funkce?

Funkce	**Její derivace**
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y'\doteq -0,69314\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y=2^x$	$y'\doteq 0,69314\cdot 2^x$
$y=3^x$	$y'\doteq 1,09861\cdot 3^x$
$y=4^x$	$y'\doteq 1,38629\cdot 4^x$
$y=8^x$	$y'\doteq 2,07944\cdot 8^x$

Všechny derivace exponenciálních funkcí vypadají skoro stejně jako původní funkce, překáží tam pouze nějaké číslo, kterým se funkce násobí.

Proč?
Příklady exponenciálních závislostí:

- **počet atomů radioaktivní látky:** Hodnota funkce odpovídá počtu atomů, změna hodnoty odpovídá počtu atomů, které ubudou (ten je ale opět dán pomocí počtu atomů, které v látce existují, protože právě polovina z nich během poločasu rozpadu zaniká).
- **množství peněz na účtu:** Hodnota funkce odpovídá počtu peněz na účtu, změna hodnoty odpovídá množství peněz, které přibudou (tedy úrokům připsaným od banky. Množství peněz, které banka na účet připíše, zase odpovídá množství uložených peněz).

$\Rightarrow$ I prostou úvahou vidíme, že u exponenciálních funkcí je od funkce k její derivaci velmi blízko (změna exponenciální funkce v určitém bodě odpovídá její aktuální hodnotě).

Všechny řádky můžeme zapsat takto:

Funkce	**Její derivace**
$y=a^x$	$y'=k_a\cdot a^x$

Potřebujeme najít funkci, pro kterou platí $k_a=1$. Z tabulky je vidět, že:

- k_a je zřejmě logaritmus při nějakém neznámém základu ($k_{\frac{1}{2}}=-k_2$, $k_4=2k_2$, $k_8=3k_2$
  $\Rightarrow$ tato čísla splňují pravidla pro logaritmy)
- hledané číslo $a\in(2;3)$ ($k_2\doteq 0,69314$, $k_3\doteq 1,09861$)

Pedagogická poznámka: Předchozí část kapitoly není určena k zapamatování a nikdy ji nezkouším. Jde pouze o snahu zdůvodnit, proč se v matematice používá z běžného pohledu nesmyslné číslo a ještě se o něm tvrdí, že je nejvýhodnější.

Správná hodnota hledaného čísla je další základní matematická konstanta (velmi podobná číslu π), jmenuje se **Eulerovo číslo** $e \doteq 2{,}7182818284590452353602874713526624977 5$.

Eulerovo číslo (podobně jako π):

- má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj (a tedy nejde napsat zlomkem, je iracionální),
- není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty,
- dokážeme je určit na libovolný počet desetinných míst,
- je nejvhodnějším číslem pro základ exponenciální funkce i základ logaritmů (z pohledu normálního člověka je neuvěřitelné, že používáme číslo, které nedokážeme ani přesně zapsat, ale z matematického hlediska je používání *e* podobně opodstatněné jako používání radiánů pro velikost úhlu).

Exponenciální funkce $y = e^x$ se nazývá **přirozená exponenciální funkce**.
(Přirozená exponenciální funkce je funkce, jejíž změna je v každém okamžiku rovna její hodnotě.)

K ní inverzní logaritmická funkce o základu e $y = \log_e x$ se nazývá **přirozená logaritmická funkce (přirozený logaritmus)**.
(Přirozený logaritmus má ze všech logaritmických funkcí nejhezčí derivaci $y = \frac{1}{x}$.)

Značení: Místo $y = \log_e x$ píšeme $y = \ln x$.

Poznámka: Protože víme, že k_a je logaritmus při neznámém základu a platí $k_e = 1$, je zřejmé, že platí $k_a = \ln a$, pak totiž vychází $k_e = \ln e = \log_e e = 1$.

Pedagogická poznámka: Je nutné se nenechat příliš unést a vykládat první část hodiny tak, aby na zbytek za touto poznámkou zbylo přibližně 20 minut. Pro studenty není vzorec pro změnu základu tak jednoduchý, jak by se dalo očekávat. Největší problémy jim působí volnost, se kterou si základ mohou volit.

Problém:
Na kalkulačkách se vyskytují většinou pouze tlačítka pro $\ln x$ a $\log x$ $\Rightarrow$ pomocí kalkulaček můžeme určovat pouze logaritmy se základem e a 10 $\Rightarrow$ musí existovat vzorec, jak snadno určit i logaritmus při jiném základě.

Pro každé $a > 0; a \neq 1$, $b > 0; b \neq 1$ a pro všechna kladná čísla r platí:
$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

Zajímavé. Nový základ si můžeme volit libovolně ze všech čísel, která můžeme použít jako základ logaritmu.

Př. 1: Urči pomocí kalkulačky přibližnou hodnotu (na 6 desetinných míst) $\log_2 3$.

Podle vzorce platí $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \doteq \frac{0,477121254}{0,301029995} = 1,584962501$

nebo $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \doteq \frac{1,098612289}{0,69314718} = 1,584962501$.

Pedagogická poznámka: V tomto případě je potřeba, aby byl výsledek spočítán na kalkulačce rovnou (ne přepisováním mezivýsledků na papír a jejich opětovným zadáváním do kalkulačky), například posloupností kláves: **log 3 / log 2 =**. Studenti by si měli vyzkoušet spočítat hodnotu logaritmu oběma způsoby, aby si tak ověřili, že na volbě základu opravdu nezáleží.

Vzorec si můžeme ověřit i pomocí nám známých hodnot logaritmů:

$2 = \log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2$

nebo dokázat:

Platí: $r = a^{\log_a r}$ - **rovnost zlogaritmujeme při základu *b*** = na obou stranách rovnice jsou čísla, která se rovnají, pokud z obou čísel uděláme logaritmy při základu *b* (libovolné kladné číslo různé od jedné), budou se rovnat i nadále.

$\log_b r = \log_b a^{\log_a r}$ - použijeme pravidlo pro mocninu uvnitř logaritmu.

$\log_b r = \log_a r \cdot \log_b a \quad / : \log_b a$

$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$

Př. 2: Odhadni (s přesností na celá čísla) hodnoty logaritmů a pak je vypočti pomocí kalkulačky:

a) $\log_3 11$ b) $\log_{0,5} 0,6$ c) $\log_2 0,1$

a) $\log_3 11 \in (2;3)$, $\log_3 11 = 2,182658$

b) $\log_{0,5} 0,6 \in (0;1)$, $\log_{0,5} 0,6 = 0,736966$

c) $\log_2 0,1 \in (-4;-3)$, $\log_2 0,1 = -3,321928$

Vzorec pro změnu základu můžeme využít při výpočtu některých logaritmů:

$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$ - všechna čísla jsou mocninami tří $\Rightarrow$ převedeme na podíl logaritmů při základu 3

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = \frac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\log_3 3^{-2}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

Př. 3: Pomocí vzorce pro změnu základu vypočti bez kalkulačky:

a) $\log_8 \sqrt[3]{4}$ b) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4}$

a) $\log_8 \sqrt[3]{4} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{4}}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}$

b) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-\frac{1}{3}}}{\log_3 3^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$

c) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 \sqrt{8}} = \frac{-2}{\log_2 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$

Shrnutí: Existuje ideální číslo jako základ přirozené exponenciální funkce i přirozených logaritmů. Jde o číslo $e \doteq 2{,}7182818284590452353602874713526624977 5\ldots$, stejně jako π nejde číslo e vyjádřit zlomkem.